

## Моделирование математических объектов и понимание математики младшими школьниками\*

И.В. Шадрина

В статье рассматривается проблема организации математической деятельности младших школьников, направленной на понимание изучаемого знания. Утверждается, что в условиях обучения понимание математики может быть достигнуто путём приближения к полному пониманию посредством построения всё более обобщённых моделей объекта познания.

*Ключевые слова:* уровень понимания, мысленный образ математического объекта, модель.

Трудности понимания математики объективно обуславливаются особой природой её объектов, которые «материализуются» только знаками (символами, словами). Свои познавательные функции знаки выполняют благодаря тому, что закрепляют знания, дают возможность хранить их в «свёрнутом» виде, снижают непродуктивную мыслительную активность в процессе оперирования знаниями, разгружают воображение и память, являются более «удобными» и «доступными» в сравнении с обозначаемым ими содержанием.

Именно поэтому в условиях обучения знаки являются обоюдоострым орудием: в сознании учащихся они могут неправомерно доминировать над содержанием, которое они обозначают, вследствие чего способны поработать ум известными правилами и способами действий непосредственно со знаками. Такое положение провоцирует формализм в обучении, а понимание становится проблематичным или даже невозможным, так как не требует обращения к содержательному смыслу знака, т.е. к соответствующему ему объекту.

Согласно И. Канту, познание осуществляется не столько посредством понятий, сколько посредством их

конструирования как формы мысли. Собственно обучение, направленное на понимание, должно обеспечить такую организацию познавательной деятельности, в процессе которой в сознании ребёнка формируется образ объекта познания, позволяющий его «определить», мысленно видеть его семантические признаки. Такой мысленный образ, адекватно отражающий соответствующую понятийную структуру, является интегральным когнитивным образованием, в составе которого выделяются чувственно-сенсорный, визуально-пространственный, словесно-речевой и операционально-логический компоненты (М.А. Холодная). С этих позиций ключ к пониманию – конструирование мысленного образа математического объекта.

Герменевтика – философская дисциплина, которая рассматривает понимание, с одной стороны, с коммуникативных позиций, как понимание в ходе непосредственного общения людей, а с другой – как перевод с одного языка на другой. Смысл выявляется как инвариант содержания каждого из текстов, получаемых при правильном переводе.

Коммуникативная составляющая понимания требует, чтобы в потоке новой информации (речи учителя, тексте учебника, наблюдаемом фрагменте реальности, подлежащем изучению математическими методами) не содержалось слов, понятий, приёмов и способов действий, не известных ученику. Выявление смысла объекта изучения требует формирования умений осуществлять взаимно обратимые переводы с одного языка описания на другой.

С методологических позиций представление информации символическими средствами есть моделирование изучаемого явления или процесса, который включает в мыслительную деятельность интеллектуальные операции: абстрагирование, идеализацию, обобщение, конкретизацию. Модель эффективна, если она

– адекватна объективному содержанию изучаемого объекта;

\* Тема диссертации «Формирование образов математических понятий как условие математического развития младших школьников».

- воспроизводит преимущественно функциональные свойства оригинала;
- является достаточно простой.

В условиях обучения математике в начальной школе новое знание предъявляется, как правило, в форме сообщения на естественном языке, являющегося вербальной моделью конкретного фрагмента реальности, абстрагирование, идеализация и обобщение свойств которого ведут к конструированию соответствующего математического объекта. Сообщение понято, если ученик может построить его предметную модель, что требует привлечения житейских и лингвистических знаний.

Например, предметная модель ситуации, с помощью которой выявляется смысл отношения «больше в несколько раз», задаваемого вербальной моделью «*Имеются 3 тетради в линейку, а тетрадей в клетку в 4 раза больше*», может быть как изображением соответствующих предметов (рис. 1), так и моделированием реальными предметами.



Рис. 1

Понимание смысла этого отношения на предметном (минимально обобщённом) уровне достигается только тогда, когда ученик может осуществить обратный переход от предметной модели к вербальной. Например, вербальное описание ситуации, представленной предметной моделью, изображенной на рис. 2, где показаны одинаковые коробки с карандашами, может быть дано предложением, содержащим словосочетание «больше в несколько раз»: «*В трёх одинаковых коробках карандашей в 3 раза больше, чем в одной*».

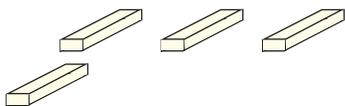


Рис. 2

**Предметный уровень** понимания достигнут, если ученик может вербализовать изучаемое отношение между совокупностями предме-

тов в такой, например, форме: одних предметов в 4 раза больше, чем других, значит, их столько же, сколько других 4 раза. Вместе с тем это первый шаг создания мысленного образа понятия «больше в несколько раз», на котором выявляются преимущественно чувственно-сенсорные когнитивные компоненты понятийной структуры.

В приведённых примерах отношение «больше в несколько раз» рассматривается для дискретных величин, но оно имеет место и для величин непрерывных, например: «*Объём бутылки в 3 раза больше, чем объём стакана*». Понимание на предметном уровне в этом случае достигается, если бутылка заполняется при переливании в неё трёх полных стаканов воды. Отметим, что в отношении «больше в несколько раз» могут находиться только величины одного рода.

Понимание на предметном уровне необходимо, но недостаточно. Существенной особенностью познавательной деятельности детей младшего школьного возраста является доминирование в ней правого полушария мозга. Вследствие этого особую значимость для младших школьников имеют модели, в которых объект познания представлен наглядно и настолько обобщённо, что это позволяет отвлечься от предметной конкретности, выделяя только те характеристики, которые могут изучаться методами математики. Поскольку такие характеристики в начальном обучении являются чаще всего числами, которые не могут быть представлены предметно, необходимо их символическое наглядное изображение.

В процессе обучения символическое представление математического объекта выполняет функцию модели, если оно адекватно отражает не только содержание изучаемого объекта, но и его связи с той реальностью, абстракцией которой этот объект является. Например, ситуация, представленная вербальной моделью «*В корзине лежат 4 яблока, а груш в 5 раз больше*», условными графическими символами моделируется следующим образом (рис. 3):

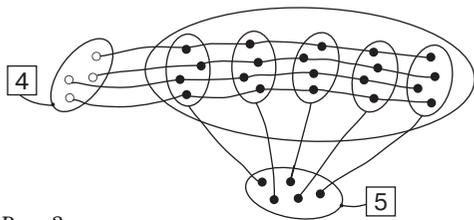


Рис. 3

Построение подобной модели опирается на имеющиеся в когнитивном опыте ребёнка знания о количественном числе и способах его условного графического изображения, а именно: количественное число есть свойство любых предметных совокупностей, когда из любых двух предметов можно составить пары так, чтобы предметов без пары не осталось (т.е. установить взаимно однозначное соответствие). Наглядную графическую модель количественного числа можно изобразить любыми предметами (рис. 4):

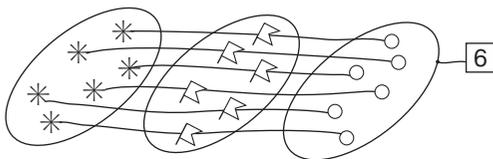


Рис. 4

Знание того, что число может быть наглядно представлено соответствующим количеством любых предметов, позволяет фиксировать в модели числовую характеристику отношения «больше в несколько раз», являющегося объектом познания и понимания. Самостоятельное построение ребёнком такой модели означает его переход на новый уровень понимания – **наглядно-графический**. Он реализуется в полной мере, если ученик овладевает умением интерпретировать графическую модель вербально, т.е. может осуществить обратный переход. В силу более высокого, в сравнении с предметной моделью, уровня обобщённости, данный переход неоднозначен. Такая модель может быть наглядным представлением различных ситуаций, имеющих ту же математическую структуру. Например, построение вербальной модели ситуации, заданной графической моделью (рис. 5), ограничивается только сохранением смысла моделируемого отношения.

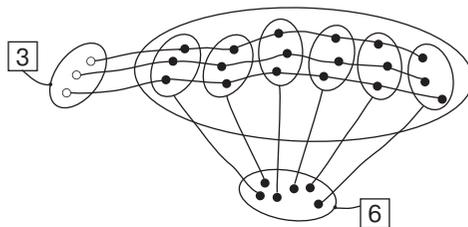


Рис. 5

Возможными интерпретациями данной модели могут быть ситуации, описываемые предложениями:

- В зоопарке 3 слона, а мартишек в 6 раз больше.
- В одной книге 3 рассказа, а в другой в 6 раз больше.
- В шахматном кружке 3 девочки, а мальчиков в 6 раз больше и т.п.

Успешная интерпретация ребёнком наглядно-графической модели включает в познавательную деятельность творческий аспект понимания, а структура создаваемого понятийного образа обогащается преимущественно визуально-пространственными компонентами. При этом осуществляется следующий шаг конструирования объекта познания, на котором происходит отвлечение от предметной реальности, а подлежащее усвоению новое знание встраивается в семантическую сеть известных ученику понятий и способов действий.

Наглядно-графической моделью ситуации «На приготовление блинов израсходовано 2 кг муки, а на приготовление пирожков в 3 раза больше», где объектом моделирования является отношение между непрерывными величинами, является рис. 6.



Рис. 6

Построение моделей непрерывных величин с помощью отрезков аргументируется тем, что отрезок есть простейший геометрический образ непрерывности. Такого рода модели также могут интерпретироваться по-разному. Например: «В одном куске 2 м ткани, а в другом в 3 раза больше», «На путь от села до города велосипедисту требуется 2 часа, а пешеходу в 3 раза больше» и т.п.

Новый уровень понимания реализуется при построении графической модели, в которой предметом наглядного моделирования являются только математические объекты, в данном случае – числа, между которыми устанавливается изучаемое отношение. Например, графической моделью, описываемой предложением «Число, которое больше 6 в 4 раза», выступает модель, представленная на рис. 7. Функциональная характеристика числа представлена здесь в форме связи между изучаемым отношением и соответствующим арифметическим действием.

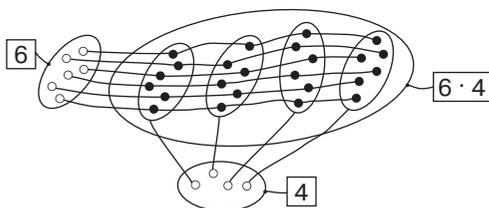


Рис. 7

Построение подобной модели опирается на усвоенные на предшествующих уровнях понимания способы действий и привлечение имеющегося в когнитивном опыте детей знаний об умножении. Для непрерывных величин аналогичная модель дана на рис. 8.

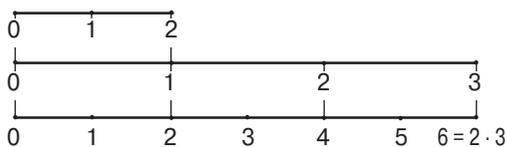


Рис. 8

Этот уровень можно назвать **когнитивно-графическим**. Он позволяет осуществить овладение соответствующими способами действий и перейти к построению математической модели изучаемого объекта путём обобщения усвоенных знаний.

Математическая модель отношения «больше в несколько раз» строится средствами естественного языка, а используемые вербальные символы приобретают новый смысл: *число, в несколько раз большее данного, есть произведение данного числа на то число, во сколько раз оно больше данного.*

Успешная вербализация информации на каждом из уровней является объективным показателем того, что ребёнок понимает предлагаемый ему учебный материал. При этом в сознании ребёнка формируется новая когнитивная схема (мысленный образ нового понятия), расширяющая его возможности адекватно реагировать на разнообразные виды информации.

Операционально-логические компоненты понятийной структуры формируются в процессах вербализации на каждом из уровней понимания в силу того, что логические операции имплицитно содержатся в языке. В то же время **операционально-логический** уровень понимания достигается тогда, когда ученик оперирует только соответствующим мысленным образом без обращения к наглядным представлениям рассматриваемых ситуаций. Например, ученик сразу и правильно решает задачу: «*Несколько подарков разложили в 4 одинаковых ящика. Сколько таких ящиков потребуется, если количество подарков увеличить в 5 раз?*».

На предметном уровне понимания выявляется значение слов и предложений естественного языка, житейский смысл сообщения. Наглядно-графический уровень реализуется путём построения наглядно-графической модели, представляющей математические характеристики конкретного фрагмента реальности. Когнитивно-графический уровень достигается при построении соответствующей модели, в которой наглядно отражены собственно математические объекты, функциональные и содержательные связи между ними. Операционально-логический уровень позволяет оперировать реальными явлениями объектной области путём оперирования их мысленными моделями. Результатом понимания выступает целостное знание об изучаемом объекте, его содержательных связях и способах функционирования.

Таким образом, понимание математики младшими школьниками можно рассматривать как углубляющийся процесс постепенного приближения к полному пониманию нового знания путём овладения операциями и способами их выполнения, направ-

ленными на конструирование объекта познания. Этот процесс может быть положен в основу организации познавательной деятельности младших школьников.

### Литература

1. *Бершадский, М.Е.* Понимание как педагогическая категория / М.Е. Бершадский. – М.: Центр «Педагогический поиск», 2004. – 176 с.
2. *Холодная, М.А.* Психология интеллекта / М.А. Холодная. – СПб. : Питер, 2002. – 264 с.
3. *Шадрина, И.В.* Математическое развитие младших школьников / И.В. Шадрина. – М. : Изд-во МГПУ, 2009. – 130 с.

*Ирина Вениаминовна Шадрина – канд. пед. наук, доцент, профессор кафедры естественно-научных дисциплин и методики их преподавания в начальной школе Московского городского педагогического университета, г. Москва.*