Использование знаково-символических средств при обучении младших школьников решению задач

Н.В. Буренкова

Моделирование используется для интерпретации действий с объектами, чтобы сделать представление об использовании этих объектов более доступным. Под моделированием задачи понимается замена действий с обычными предметами действиями с их моделями – уменьшенными образцами, муляжами, макетами, а также с их графическими изображениями: рисунками, чертежами, схемами. Важность графического моделирования при формировании умения анализировать и решать задачи объясняется тем, что модели

– наглядно отображают каждый элемент отношения, что позволяет им оставаться простыми при любых преобразованиях данного отношения;

– позволяют увидеть структурные компоненты в тексте в «чистом» виде, без отвлечения на частные конкретные характеристики (числовые значения величин, яркие изображения и др.);

– обладают свойствами предметной наглядности, конкретизируют абстрактные отношения, что нельзя увидеть, например, сделав краткую запись задачи;

– обеспечивают поиск плана решения, что позволяет постоянно соотносить физическое (или графическое) и математическое действия.

Процесс целенаправленного обучения графическому моделированию должен осуществляться постепенно, отражая переход от конкретного к абстрактному в виде рисунка, условного рисунка, чертежа, схемы (схематизированного чертежа). Модели такого вида выступают как формы отображения структуры задачи, где каждая последующая форма построена в более обобщённом и абстрагированном виде [5]. Использование упрощённых рисунков, объектов условных рисунков, графических чертежей часто вызывает затруднение в процессе поиска решения задач; учащиеся не могут выбрать необходимое арифметическое действие, потому что для ответа на вопрос достаточно произвести пересчёт. Модели такого вида можно использовать только при небольших числовых данных (в противном случае рисунок займёт много места в тетради и потребует неоправданных затрат времени на уроке). Использовать эти модели невозможно и в том случае, если числовые данные заменены буквами, геометрическими фигурами и т.д.; порой рисунки не позволяют ученику отвлечься от несущественных признаков и увидеть то существенное, общее, что объединяет данные. Однако эти виды графических моделей нельзя исключать полностью, поскольку они помогают детям осуществлять переход от реальности (предметной ситуации) к схематизированному чертежу, что очень важно при формировании умения переводить задачу с естественного языка на математический язык символов.

В начальном курсе математики создание моделей может осуществляться по-разному [1–4, 6].

Вариант 1. Материализация структуры текста задачи путём представления с помощью знаково-символических средств всех составляющих текста в соответствии с последовательностью изложения информации. Завершением построения модели при этом способе будет символическое изображение вопроса задачи. Созданная модель даёт возможность выделить отношение между компонентами задачи, на основе которых находятся действия, приводящие к ответу на вопрос. При данном варианте моделирования используются различные знаково-символические средства (отрезки, иконические знаки и др.). Каждое данное задачи представляется в виде отдельных конкретных символов.

В основу классификации простых задач положено отношение между объектами и их величинами. По этому признаку выделяют четыре типа отношений: целое/часть, разность, кратность, равенство. Здесь уместно сделать замечание об употребляемой терминологии. Хотя учащиеся и знакомятся с названиями компонентов действий сложения, вычитания, умножения, деления, но рабочими терминами при описании этих действий являются не они, а названия компонентов отношений. Именно отношения, связывающие величины между собой, определяют математическую структуру задачи. Эти отношения представлены моделями разного вида: стрелочными схемами, чертежами, обобщающими формулами (см. таблицу на с. 48).

Схемы и схематические чертежи, т.е. пространственно-графические модели, представляя собой зримую величину, позволяют производить реальные преобразования, результаты которых можно не только предполагать, но и наблюдать. В этих моделях отражены существенные отношения и связи объекта, выделенные посредством соответствующих преобразований. Именно абстрактный материал связан с освоением общего способа действия при решении задач. Буквенные модели или обобщающие формулы фиксируют результаты реально или мысленно произведённых действий с объектами. Появление буквенной символики часто связано с окончанием учебной работы по решению задач, хотя она может служить средством фиксации действий в процессе работы на каком-либо из этапов или средством «схватывания» оснований предметного действия.

Дадим краткую характеристику содержания репрезентации отношений и опишем порядок их изучения. Вначале дети выделяют посредством определённых предметных действий отношения между объектами (целое/часть, разность, кратность, равенство) и уясняют, что практическая ситуация, содержащая эти отношения, может быть преобразована во столько задач, сколько элементов отношения содержится в ситуации. Освоение способов анализа и решения текстовых задач связано вначале с отношением целого и частей. Затем решаются задачи, основанные на

Репрезентация отношений

Тип отношений	Схема	Схематический чертёж	Обобщающие формулы
Задачи на целое и части	C (?) целое A часть, B часть C A (?), B C A, B (?)	a b x x b c a x c	$\underline{A}+\underline{B}=\underset{\wedge}{\underline{C}}$ $\underset{\wedge}{\underline{C}}-\underline{B}=\underline{A}$ $\underset{\wedge}{\underline{C}}-\underline{A}=\underline{B}$
Задачи на разностное сравнение	A целое B часть, C (?) часть A большая величина (?) B меньшая величина, C значение разности A (?) B, C	a b x a x c x b c	$\underset{\wedge}{\underline{A}}-\underline{B}=\underline{C}$ $\underset{\wedge}{\underline{A}}-\underline{C}=\underline{B}$ $\underline{B}+\underline{C}=\underset{\wedge}{\underline{A}}$
Задачи на целое и равные части	**(?) значение целого** ед. E мерка, A величина **a часть**, **b кол. равных частей** C промежуточная мерка E **c** A **a**, **?** C E **c** A **?**, **b** C	a b ..... a x x a ..... a c b x ..... x c	$\frac{A}{E}=a\cdot b$ $\frac{A}{C}=c\div a$ $\frac{C}{E}=c\div b$
Задачи на кратное сравнение	**(?) значение больш. величины** ед. E мерка, A больш. величина **a зн. меньш. величины**, **c отнош. кратн.** B меньшая величина E **b** A **?**, **c** B E **b** A **a**, **?** B	a ..... c x x ..... c b a ..... x b	$\frac{A}{E}=a\cdot c$ $\frac{B}{E}=b\div c$ $\frac{A}{B}=b\div a$

4. Заказ № 4886

отношении разностного сравнения: поиск значения большей величины, меньшей величины или разности.

При знакомстве учащихся с новыми арифметическими действиями – умножением и делением – рассматривается определённое отношение между величинами. При изучении этих отношений конструируется новый способ измерения и построения величины, в котором помимо основной, или единичной, мерки задействована ещё одна – вспомогательная, или промежуточная. Таким образом, способ измерения и построения величины состоит из двух действий: построение (измерение) промежуточной мерки с помощью основной и построение (измерение) самой величины с помощью промежуточной мерки. На этом способе измерения и построения величины моделируется процесс выделения кратного отношения и отношения целого, состоящего из равных частей в текстовых задачах. Фиксируют эти отношения схемы и чертежи.

Рассматривая общие особенности указанных математических структур, переходят к рассмотрению их частных проявлений. Из общего свойства однозначной зависимости элементов математической операции выводится частное следствие, имеющее практическое приложение: если требуется знать числовые характеристики элементов операции, то необходимость в непосредственном счёте или измерении возникает только по отношению к двум из них, в то время как третий может быть определён путём выполнения формальных операций со значениями первых двух [3].

Материализация структуры текста задачи с целью рассмотрения условий и вопроса, выделения отношения, являющегося основой общего способа её решения, осуществляется в двух направлениях. Сначала модель строится после или в процессе манипуляций с предметным материалом. Затем, наоборот, по заданной модели нужно выполнить соответствующие действия. Таким образом, кодирование и декодирование информации осуществляется по двум направлениям:

I. Кодирование элементов текста и их связей на графическом языке, включающее в себя следующие этапы:

1) предметный уровень работы по каждому типу отношений;

2) использование схем для фиксирования отношений, предложенных текстом;

3) изображение каждого типа отношений при помощи чертежа;

4) знаковое моделирование отношений при помощи формул.

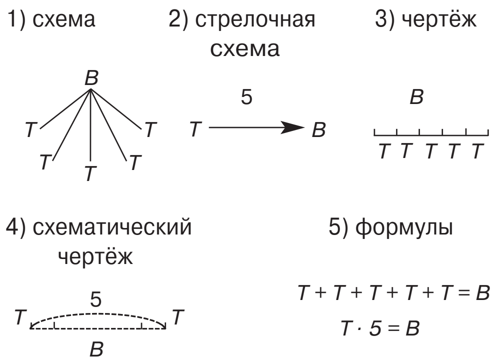
II. Декодирование информации:

1) составление и решение задач по стрелочным схемам, схематическим чертежам, формулам на все изученные виды отношений;

2) замещение одних форм вспомогательных моделей другими;

3) использование рациональных видов моделей.

Замещение одних форм моделей другими на примере отношения целого и равных частей с буквенными данными:

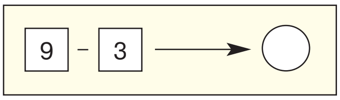


Задача. Туристы были в пути 5 дней. Каждый день они проходили по *T* км. Сколько всего километров *B* они прошли за 5 дней? (2-й класс)

Одним из видов репрезентативных (вспомогательных) моделей простых задач являются структурные модели [6]. Известные значения величин обозначаются квадратиками, а неизвестные – кружочками. Главный член соотношения, который является результатом действия, отделяется от остальных членов стрелкой, а эти последние соединяются знаком действия: в соотношениях частей и целого – сложения, в соотношении разностного сравнения – деления, в соотношении – зависимости между значениями разных величин – умножения.

Рассмотрим структурную модель задачи:

Задача. В одном сосуде 9 л воды, а в другом – 3 л. На сколько литров воды в первом сосуде больше, чем во втором?



<u>Вариант 2.</u> **Материализация схемы анализа текста задачи**, начиная с символического представления вопроса и всех данных (известных и неизвестных), необходимых для ответа на него. В такой модели фиксируется последовательность действий по решению задачи. При данном варианте моделирования наиболее удобными являются **графы.** Представление последовательности операций решения в виде графа вытекает из общих схем анализа, в которых отражаются основные отношения между данными задач.

Поскольку такого типа модели представляют конечный результат работы с текстом задачи, для их построения требуется умение осуществлять полный анализ текста, выделять все компоненты (известные, неизвестные объекты, величины, отношения между ними, основные и промежуточные вопросы). Такое моделирование предполагает другую схему анализа текста задачи, включающую определённую последовательность рассуждений, например: выделение вопроса задачи и его формулировка; какие данные необходимы для ответа на вопрос задачи; какие из данных известны, какие неизвестны; можно ли получить дополнительные данные для нахождения неизвестных и ответа на вопрос задачи [2].

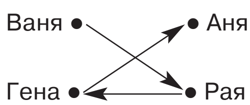
С помощью графов можно получить результаты, не выявляющиеся другими методами. В моделях, представленных графами (граф – от греч. «пишу, черчу, рисую»), точки, которыми обозначают объекты, называются вершинами графа, а отрезки (дуги, стрелки), соединяющие объекты, – рёбрами графа. При изображении отношений используются не просто отрезки, а стрелки (направленные отрезки). Направленные отрезки между любыми элементами решаемой задачи должны соответствовать одному и тому же отношению.

В обучении младших школьников решению задач с помощью графов можно выделить следующие виды графов:

– неориентированные (в том числе графы с рёбрами двух цветов);
– ориентированные;
– двудольные с рёбрами двух цветов [4].

Задача. В школьном турнире по шахматам определились 4 лидера: Ваня, Аня, Гена, Рая. В турнирной таблице Ваня занимает место после Раи, Гена – после Ани, а Рая – после Гены. В каком порядке расположены участники турнира в сводной таблице?

Ориентированные графы:



Задачи варьируются, в каждом случае, по числу объектов, по количеству и характеру связей между ними. Связи могут выражаться в прямой форме, а могут быть выражены косвенно. При построении графов процесс создания моделей определяется логической схемой анализа, начинающейся от основного вопроса, с последующим переходом к данным, которые необходимо выделить для ответа на вопрос, и постановкой промежуточных вопросов.

При создании различного типа моделей очень важно понять, какая информация должна быть включена в модель, какие средства (символы, знаки) будут употребляться для каждой составляющей текста, какие из них должны иметь одинаковую символику, а какие – различную. В процессе построения модели и работы с ней проводится анализ текста и перевод его на математический язык.

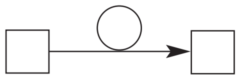
Один из подходов к моделированию при решении задач предложил Ж. Верньё. Для анализа текста задачи он использовал следующие две категории: «состояние» объекта и «трансформации» [1].

Под **состоянием объекта** понимается описание в тексте задачи тех ситуаций, в которых действует объект.

В соответствии с этим различают начальное, конечное, промежуточное состояния (или ситуации).

Трансформации – это те изменения в объектах (или с объектами), которые происходят при переходе от одного состояния к другому. Трансформация приводит к новому типу отношений между состояниями объекта.

В схемах для анализа и решения задач, предложенных Ж. Верньё, данные обозначаются в виде **геометрических фигур**: объекты – квадраты; отношения между состояниями объекта – линии и стрелки, с помощью которых указывают направленность отношений; отношения между величинами состояний объекта – круги:



Заданные числовые значения величин объекта и отношений между величинами указываются соответствующими цифрами, знак при которых фиксирует характер отношения величин (разность, кратность, равенство, целое/часть). Модель «состояние – трансформация – состояние» позволяет производить более тонкий анализ отношений и задач. Таким образом, в моделях Ж. Верньё отображается прежде всего структура задачи, в которой фиксируются состояния объекта, его преобразование (трансформация), характер и величина отношений между состояниями. Такого рода модели позволяют материализовать схему анализа содержания задачи, её математический смысл, установить на основе структуры, что является известным, а что необходимо определить, и выстроить последовательность действий для решения задач.

Рассмотренные знаково-символические средства позволяют создавать модель структуры задачи, включающую объекты, величины, их характеризующие, числовые значения (данные и искомые), соответствующие им, а также фиксировать или выводить действия, необходимые для ответа на вопрос задачи. Таким образом, при переводе текста задачи на язык математики могут создаваться различные типы моделей по характеру отношений. Кроме того, они могут различаться и по степени сложности: от простых (с минимальным числом объектов и отношений) до сложных. Необходимость в таких схемах выступает особенно отчётливо, когда последовательность выполнения действий по решению задачи расходится с явной структурой задачи или эта структура сложна и открывает разные возможности решения. Визуализация с помощью модели словесно заданного текста позволяет перевести его на математический язык и увидеть структуру математических отношений, скрытую в тексте. Таким образом, умение строить учебные модели, работать с ними является эффективным средством при анализе и решении задач.

Литература

1. *Верньё, Ж.* Ребёнок, математика и реальность : Проблемы преподавания математики в начальной школе / Ж. Верньё. – Пер. с франц. – М. : Ин-т. психологии РАН, 1998.
2. *Володарская, И.* Моделирование и его роль в решении задач / И. Володарская, Н. Салмина // Первое сентября : Математика : учеб.– метод. газета. – 2006. – № 18.
3. *Давыдов, В.В.* Проблемы развивающего обучения : Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В.В. Давыдов. – М. : Педагогика, 1986.
4. *Папи, А.* Дети и графы / А. Папи, Ж. Папи. – М. : Педагогика, 1974.
5. *Стойлова, Л.П.* Математика : учеб. для студентов высших пед. учеб. заведений / Л.П. Стойлова. – М. : Изд. центр «Академия», 1999.
6. *Фридман, Л.М.* Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика : учеб. пос. для учителей и студентов пед. вузов и колледжей / Л.М. Фридман. – М. : Школьная Пресса, 2002.

Наталья Владимировна Буренкова *– канд. пед. наук, преподаватель кафедры теории и методики начального образования Брянского государственного университета им. И.Г. Петровского, г. Брянск.*